数理解析研究所講究録
632巻 1987年 91-107

SO, Sp の有限次元表現について

青山学院大理工　小池和彦　(Kazuhiko Koike)
東大理　寺田　至　(Itaru Terada)

1. 概要

以下，群はすべて $\mathbb{C}$ 上の群，表現はすべて $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現のみを考える。SO, Sp の表現のテンソル積やウェイトの重複度をヤング図形を使って計算する方法を確立したいというのがわれわれの動機である。モデルは GL の場合の Littlewood-Richardson 法則や Kostska 数に求めることができる。H. Weyl の本"The Classical Groups"にあるように，SO_{2n+1}, Sp_{2n}の既約表現も深され以下のヤング図形でパラメトライズされる。（SO_{2n} についても少し例外的な約束を設ければ統一的に扱える。[2]を参照されたい。）テンソル積の分解をヤング図形で書くと n が十分大きければ n によらない式になるが，n が小さくなると複雑に形が変化する。われわれはこの現象を普遍指標環 Λ と特殊化準同型 $\pi_{Sp_{2n}}$, $\pi_{SO_{2n+1}}$ とい

う道具立てを用いて記述する。Λはすべての法則がnの大きいときの式(理想形)で成り立つ理想郷であり，nが小さくなったときの式(現実形)も，特殊化準同型による理想形の像として直ちに求まる。さらに，Λ中では次のようなきれいな対称性が成り立つ。Λ中には SO, Sp の既約指標のもとが全部住んでいるが，SO の既約指標全体と Sp の既約指標全体をそっくり入れ替えるような位数2の環自己同型が存在する。即ち大雑把にいえばSOの表現論と Sp の表現論は互いに鏡像の関係にある。それに加えて，SO の表現論と Sp の表現論はそれぞれ，ヤング図形を転置する操作に関する対称性を備えていることがわかる。

次に，既約表現とウェイトを共にヤング図形で表し，1つのヤング図形が表す既約表現の中の，他の1つのヤング図形が表すウェイトの重複度は，GL_n の場合にはnによらず一定であったが，SO, Sp では一般にnの多項式になる。この多項式は，SO, Sp の指標とGLの指標の関係を表す係数と，GL のウェイトの重複度を表す Kostska 数，さらにGLから SO, Sp へのウェイトの統合を表す多項係数を組合せて具体的に求められる。これを用いれば，ウェイトの重複度の計算もnごとに別々に行う必要はなくなる。

2. dominant integral weights とヤング図形

念のために，以下で用いる dominant integral weights とそのヤング図形との対応を説明する。

SO_{2n+1} では，保存すべき対称双1次形式として次の行列で表されるものをとる：

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \overset{n}{\begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{smallmatrix}} \\ & 1 & \\ \underset{}{\begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{n} & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} O_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{ X \in GL_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^{t}X J_0 X = J_0 \} \\ SO_{2n+1}(\mathbb{C}) = O_{2n+1}(\mathbb{C})_0 \left(\begin{array}{c}\text{単位元} \\ \text{連結成分}\end{array}\right) \end{array}$$

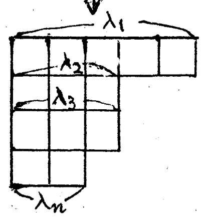
すると Cartan subgroup として $T = \{ t = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n, 1, t_n^{-1}, \cdots, t_1^{-1}) \}$ をとることができる。T の指標 ε_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を $\varepsilon_i : T \ni t \longmapsto t_i \in \mathbb{C}^*$ で定める。正ルート系としては SO_{2n+1} 内の上半三角行列全体からなる Borel 部分群に対応するものをとる。このとき

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dominant integral} \\ \text{weights of } SO_{2n+1}\end{array}\right\} = \left\{ \varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \cdots \varepsilon_n^{\lambda_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{Z} \ (1 \leqq i \leqq n) \\ \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \end{array} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \left\{ \begin{array}{l} \text{深さ } n \text{ 以下の} \\ \text{partitions} \end{array} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$\lambda =$  $\in \left\{ \begin{array}{l} \text{深さ } n \text{ 以下の} \\ \text{ヤング図形} \end{array} \right\}$

partitionとは正整数の有限の広義減少列（あとに0をいくつかつけたしたものとも同一視する）のことであり，深さとはその（0でない）項の個数である。ヤング図形とは上のようにpartitionを正方形を並べた図形で表したもののことである。ヤング図形λに対応するウェイトをハイエストウェイトにもつSO_{2n+1}の既約表現（またはその指標）を$\lambda_{SO_{2n+1}}$で表す。

Sp_{2n}では保存される交代双1次形式を次の行列に対応するものにとる。

$$J_{Sp}=\begin{pmatrix} 0 & \overset{n}{\overbrace{\begin{matrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{matrix}}} \\ \underset{n}{\underbrace{\begin{matrix} & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{matrix}}} & 0 \end{pmatrix},\quad Sp_{2n}(\mathbb{C})=\{X\in GL_{2n}(\mathbb{C})\mid {}^tXJ_{Sp}X=J_{Sp}\}$$

Cartan部分群として$T=\{t=\mathrm{diag}(t_1,\cdots,t_n,t_n^{-1},\cdots,t_1^{-1})\}$をとり，$T$の指標$\varepsilon_i\ (1\leq i\leq n)$を$\varepsilon_i: T\ni t\mapsto t_i\in\mathbb{C}^*$で定め，上半三角行列からなるBorel部分群に対応する正ルート系を指定すると，やはりdominant integral weightsを深さn以下のヤング図形と対応させることができる。

$$\left\{\begin{matrix}\text{dominant integral}\\ \text{weights of } Sp_{2n}\end{matrix}\right\}=\left\{\varepsilon_1^{\lambda_1}\varepsilon_2^{\lambda_2}\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n}\;\middle|\;\begin{matrix}\lambda_i\in\mathbb{Z}\\ \lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\left\{\begin{matrix}\text{深さ}n\text{以下のpartitions}\\ \text{（ヤング図形）}\end{matrix}\right\}$$

同様に既約表現（指標）を$\lambda_{Sp_{2n}}$で表す。

3. 普遍指標環と特殊化準同型

われわれの“理想郷”Λとしては，I. G. Macdonald [4] がGLの場合に用いたのと同じ“無限変数の対称式環”を用いる。

<u>定義</u>　$\Lambda :\underset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim (\{\Lambda_n\}, \{\pi_{mn}\})$ (graded ring の category)
ただし $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{Sym}(n)}$ (対称多項式環；$n \in \mathbb{Z}_{>0}$)，$m \geqq n$ に対し $\pi_{mn} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_n$ は $x_{n+1}, \cdots, x_m$ を 0 とおく準同型とする。また自然な射影 $\Lambda \rightarrow \Lambda_n$ を π_n で表す。——

Λ_n は GL_n の多項式表現の指標環 $R_+(GL_n)$ と見なせる。GL_n の既約な多項式表現はやはり深さ n 以下のヤング図形で表されるから，Λ_n は $\mathbb{Z}$-basis $\{\lambda_{GL_n}\}_{d(\lambda) \leq n}$ をもつ ($d(\lambda)$ はヤング図形 λ の深さを表す)。Λ は次の性質をもつ元 λ_{GL} (λ はすべてのヤング図形) からなる $\mathbb{Z}$-basis $\{\lambda_{GL}\}$ をもつ。

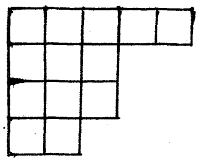
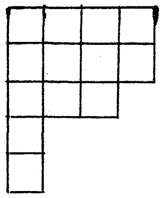
$$\pi_n(\lambda_{GL}) = \begin{cases} \lambda_{GL(n)} & (n \geqq d(\lambda)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

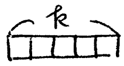
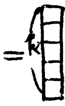
Base $\{\lambda_{GL}\}$ に関する Λ の構造定数を次のように $LR^{\nu}_{\lambda\mu}$ で表す。次の式は π_n を施せば GL_n の表現のテンソル積の分解を与える。$LR^{\nu}_{\lambda\mu}$ がヤング図形を使って求めるのが Littlewood-Richardson の法則である。

$$\lambda_{GL}\, \mu_{GL} = \sum_{\nu} LR^{\nu}_{\lambda\mu}\, \nu_{GL}$$

次は GL の表現論の転置に関する対称性を与える古典的な結果である。

<u>定理1</u>　$\mathbb{Z}$-linear involution　$\omega : \Lambda \ni \lambda_{GL} \longmapsto ({}^t\lambda)_{GL}$ は積を保つ。ここで ${}^t\lambda$ はヤング図形 λ を主対角線に関して反転した図形を表し，λ の<u>転置</u>と呼ばれる。

$\lambda =$  $\longleftrightarrow$ ${}^t\lambda =$ 

Λ の元 p_k, e_k $(k \geqq 0)$ を　$p_k :=$  $_{GL}$, $e_k :=$  $_{GL}$ で定める。$\pi_n(p_k)$ は $S_k(\mathbb{C}^n)$ 上にひき起こされる GL_n の表現の指標，$\pi_n(e_k)$ $(n \leqq k)$ は $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ 上の GL_n の指標となる。$\{p_k\}_{k \geqq 1}$, $\{e_k\}_{k \geqq 1}$ はそれぞれ Λ の代数的独立な生成系となる。

<u>定義</u>　$\Lambda \ni \lambda_{Sp}$　（λ はヤング図形）を次で定義する。

$$\lambda_{Sp} = \begin{vmatrix} p_{\lambda_1} & p_{\lambda_1+1} + p_{\lambda_1-1} & \cdots & p_{\lambda_1+(l-1)} + p_{\lambda_1-(l-1)} \\ p_{\lambda_2-1} & p_{\lambda_2} + p_{\lambda_2-2} & \cdots & p_{\lambda_2+(l-2)} + p_{\lambda_2-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\lambda_l-(l-1)} & p_{\lambda_l-(l-2)} + p_{\lambda_l-l} & \cdots & p_{\lambda_l} + p_{\lambda_l-2(l-1)} \end{vmatrix}$$

ただし $l = d(\lambda)$ である。

<u>注意</u>　H. Weyl [5] は，$n \geqq d(\lambda)$ のとき $\lambda_{Sp_{2n}}$ が上の右辺の行列式で表されることを示した。但し p_k は $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の

$S_k(\mathbb{C}^{2n})$ 上の指標を表すものと見直す。上の $\lambda_{Sp} \in \Lambda$ の定義もその事実がもとになっている。

<u>定義</u>　Λ から $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の指標環 $R(Sp_{2n})$ への準同型（<u>特殊化準同型</u>と呼ぶ）$\pi_{Sp_{2n}}$ を次の合成で定義する。

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\pi_{2n}"] \arrow[rr, bend left, "\pi_{Sp_{2n}}"] & \Lambda_{2n} = R_+(GL_{2n}) \arrow[r, "\substack{\text{指標の}\\\text{部分群への制限}}"] & R(Sp_{2n}) \end{tikzcd}$$

上に述べたことから直ちに次が得られる。

<u>命題</u>　$n \geq d(\lambda)$ ならば $\pi_{Sp_{2n}}(\lambda_{Sp}) = \lambda_{Sp_{2n}}$

$\{\lambda_{Sp}\}$ も Λ の $\mathbb{Z}$-basis をなす。

SO に関しても同様に $\lambda_{SO} \in \Lambda$ と $\pi_{SO_{2n+1}} : \Lambda \to R(SO_{2n+1})$ を定義する。$\{\lambda_{SO}\}$ も Λ の $\mathbb{Z}$-basis となる。λ_{SO} の定義式のみ下に示す。

$$\lambda_{SO} \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{vmatrix} p_{\lambda_1} - p_{\lambda_1-2} & p_{\lambda_1+1} - p_{\lambda_1-3} & \cdots & p_{\lambda_1+(\ell-1)} - p_{\lambda_1-(\ell+1)} \\ p_{\lambda_2-1} - p_{\lambda_2-3} & p_{\lambda_2} - p_{\lambda_2-4} & \cdots & p_{\lambda_2+(\ell-2)} - p_{\lambda_2-(\ell+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\lambda_\ell-(\ell-1)} - p_{\lambda_\ell-(\ell+1)} & p_{\lambda_\ell-(\ell-2)} - p_{\lambda_\ell-(\ell+2)} & \cdots & p_{\lambda_\ell} - p_{\lambda_\ell-2\ell} \end{vmatrix}$$

（ただし $\ell = d(\lambda)$）

Λ の base $\{\lambda_{Sp}\}$, $\{\lambda_{SO}\}$ と $\{\lambda_{GL}\}$ の間の基底変換は次のように与えられる。D. E. Littlewood は十分大きな n に対する指標の間の関係式としてこれに相当する式を示した[3]。

定理2 (Character Interrelation Theorem, CIT)

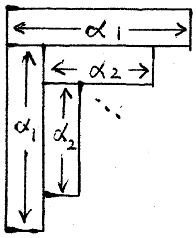
i) $\lambda_{GL} = \sum_{\mu}\left(\sum_{\kappa} LR^{\lambda}_{t(2\kappa),\mu}\right)\mu_{Sp}$

ii) $\lambda_{GL} = \sum_{\mu}\left(\sum_{\kappa} LR^{\lambda}_{2\kappa,\mu}\right)\mu_{SO}$

iii) $\lambda_{Sp} = \sum_{\mu}\left(\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|} LR^{\lambda}_{\Gamma(\alpha),\mu}\right)\mu_{GL}$

iv) $\lambda_{SO} = \sum_{\mu}\left(\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|} LR^{\lambda}_{t\Gamma(\alpha),\mu}\right)\mu_{GL}$

但し $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_\ell)$ に対し $2\kappa=(2\kappa_1,\cdots,2\kappa_\ell)$ であり，distinct partition $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell)$ $(\alpha_i>\alpha_{i+1})$ に対し $\Gamma(\alpha)$ は次のヤング図形を表す。$|\alpha|$ は α の成分の和を表す。

$\Gamma(\alpha) =$ 

注　i), ii) に特殊化準同型を作用させると，GL から Sp，GL から SO への制限則を得る。ただし $n < d(\lambda) \leqq 2n$ (または $2n+1$) なる λ に対する右辺の計算には，5節で述べる特殊化準同型の記述が必要である。iii), iv) に特殊化準同型を施すと，逆に Sp, SO の既約指標を GL の指標の各群への制限の交代和として表す式（仮に構成則と呼ぶ）を得る。

CIT と，Littlewood-Richardson 法則を組合せれば，$\{\lambda_{Sp}\}$ の2つの元の積を同じ base に関して書き下す式を得る（SO も同様）。これに特殊化準同型を施すと，Sp, SO の表現のテンソル積を既約分解する式になるものである。

4. 双対性と対称性

定理1は $LR^{t\nu}_{t\lambda\, t\mu} = LR^{\nu}_{\lambda\mu}$ を意味していた。これと CIT の iii), iv)より次を得る。

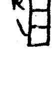
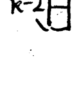
定理3 (Sp と SO の双対性)　$\omega(\lambda_{Sp}) = ({}^t\lambda)_{SO}$

注　これは次を意味する。$\{\lambda_{SO}\}$, $\{\lambda_{Sp}\}$ に関する Λ の構造定数をそれぞれ $B^{\nu}_{\lambda\mu}$, $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ と書く(これは CIT と Littlewood-Richardson 法則で記述される)。このとき $B^{t\nu}_{t\lambda\, t\mu} = C^{\nu}_{\lambda\mu}$ が成り立つ。

さらに, $B^{\nu}_{\lambda\mu}$, $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ それぞれが次に示すような転置に関する対称性をもつ。

定理4 (転置に関する対称性)　$\mathbb{Z}$-linear involution ι_{Sp}: $\Lambda \ni \lambda_{Sp} \longmapsto ({}^t\lambda)_{Sp} \in \Lambda$ は積を保つ。$\mathbb{Z}$-linear involution ι_{SO}: $\Lambda \ni \lambda_{SO} \longmapsto ({}^t\lambda)_{SO} \in \Lambda$ も積を保つ。

注　それぞれ $C^{t\nu}_{t\lambda\, t\mu} = C^{\nu}_{\lambda\mu}$, $B^{t\nu}_{t\lambda\, t\mu} = B^{\nu}_{\lambda\mu}$ を意味している。上の注と合わせれば $B^{\nu}_{\lambda\mu} = C^{\nu}_{\lambda\mu}$ も出る(Sp と SO のテンソル積の分解(理想形)の一致)。

証明の概略　方針は定理1の証明(例えば I. G. Macdonald [4]参照)と同じである。まず Sp の場合を示す。CIT によれば  $_{Sp}$ =  $_{GL} = P_k$,  $_{Sp}$ =  $_{GL}$ −  $_{GL}$

$= e_k - e_{k-2}$ である。この最後の元を e_k^0 と書く。$\{e_k^0\}_{k\geq 1}$ も代数的独立な Λ の生成系になる。そこでまず

1° $p_k \longleftrightarrow e_k^0$ を入れ替える $(\forall k \geq 1)$ ような Λ の algebra involution ι'_{Sp} の存在を示す。これには，$\{p_k\}_{k\geq 1}$ と $\{e_k^0\}_{k\geq 1}$ の間の基本関係式が p_k と e_k^0 の一斉交換に関して不変であることを示して用いる。

2° $\iota'_{Sp}(\lambda_{Sp}) = ({}^t\lambda)_{Sp}$ を計算して示す。実際には λ_{Sp} の定義式に ι'_{Sp} を施し，さらに ω を施すと容易な変形で λ_{SO} の定義式に一致することを示し，定理3を用いる。

これで $\iota'_{Sp} = \iota_{Sp}$ となり目的が果たせた。

SO の場合には $p_k^0 (= p_k - p_{k-2})$ と e_k を用いるほかはほぼ同様である。▌

5. 特殊化準同型の記述

3節の終りで述べたように，Λ 中の基底変換式や積の分解式は特殊化準同型を施して初めて現実の指標環での等式となる。しかし3節の命題によって $n \geq d(\lambda)$ のときは像がわかっているから，$n < d(\lambda)$ のときを解決すればよい。おもしろいことに，そのためにわれわれは4節の結果を用いる。

方針を述べれば次の通りである。

1° λ_{Sp} を $\{e_k^0\}$ で表す式を作る。λ_{SO} を $\{e_k\}$ で表す式を作る。

2° $\pi_{Sp_{2n}}(e_k^0)$ 及び $\pi_{SO_{2n+1}}(e_k)$ を調べる。

3° 特殊化の像を求める方法を簡単な法則にまとめる。

まず Sp の場合を説明する。λ_{Sp} を $\{e_k^0\}$ で表す式は λ_{Sp} の定義式に ι_{Sp} を施して得られる。

$$(*) \qquad \lambda_{Sp} = \begin{vmatrix} \mathbb{e}^0_{\lambda'_1}[\ell'] \\ \mathbb{e}^0_{\lambda'_2-1}[\ell'] \\ \vdots \\ \mathbb{e}^0_{\lambda'_{\ell'}-(\ell'-1)}[\ell'] \end{vmatrix} \qquad \text{但し } {}^t\lambda = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_{\ell'}),\ \ell' = d({}^t\lambda),$$
$$\mathbb{e}^0_k[\ell'] = (e^0_k,\ e^0_{k+1} + e^0_{k-1},\ \cdots,\ e^0_{k+(\ell'-1)} + e^0_{k-(\ell'-1)})$$

次に Sp_{2n} の表現として $\Lambda^k\mathbb{C}^{2n} \cong \Lambda^{2n-k}\mathbb{C}^{2n}$ であること及び $e_k^0 = e_k - e_{k-2}$ に注意すると次を得る。

$$\pi_{Sp_{2n}}(e_k^0) = \begin{cases} {}^{k}\boxed{\begin{smallmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{smallmatrix}}_{\,Sp_{2n}} & (0 \leqq k \leqq n) \\ -\,{}^{2n+2-k}\boxed{\begin{smallmatrix}\ \\ \ \\ \ \end{smallmatrix}}_{\,Sp_{2n}} = -\pi_{Sp_{2n}}(e^0_{2n+2-k}) & (n+2 \leqq k \leqq 2n+2) \\ 0 & (k = n+1,\ k \geqq 2n+3) \end{cases}$$

従って次が成り立つ。

$$\pi_{Sp_{2n}}(\mathbb{e}^0_k[\ell']) = \begin{cases} \pi_{Sp_{2n}}(\mathbb{e}^0_k[\ell']) & (0 \leqq k \leqq n) \\ -\pi_{Sp_{2n}}(\mathbb{e}^0_{2n+2-k}[\ell']) & (n+2 \leqq k \leqq 2n+\ell'+1) \\ 0 & (k = n+1,\ k \geqq 2n+\ell'+2) \end{cases}.$$

$(*)$ の右辺をこれに従って書き替えれば，$\pi_{Sp_{2n}}(\lambda_{Sp})$ は $\mathbb{e}^0_k[\ell']$ $(0 \leqq k \leqq n)$ の行列式で表される（かまたは 0 になる）。同一

の行が2つ以上現れれば行列式は0であり，さもなければ行の順序を並べ替えてindex の大きい順に直してやる（符号が出る）と，それはあるμ（$d(\mu)\leq n$）に対応するμ_{sp}を表す式と一致する。即ち，

<u>定理5</u>　$\pi_{Sp_{2n}}(\lambda_{sp})$ は0または$\pm\mu_{Sp_{2n}}$（$\exists\mu$ s.t. $d(\mu)\leq n$）となる。μはλから簡単に求められる。

上の計算を数列だけに着目して示せば次のようになる。

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$

↓ ・転置する

$(\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_{\ell'})$

↓ ・$(0, 1, \cdots, \ell'-1)$ を引く

$(a_1, a_2, \cdots, a_{\ell'})$

↓
- $n+2$以上の成分xを　$2n+2-x$ でおきかえる。
- 成分に$n+1$が現れれば結果は0になる。
- $(-1)^{\text{おきかえの個数}}$ の符号がつく。

$(b_1, b_2, \cdots, b_{\ell'})$

↓
- 大きい順に並べ替える。
- 等しい成分があれば結果は0になる。
- 並べかえの置換の符号がつく。

$(c_1, c_2, \cdots, c_{\ell'})$

↓ ・$(0, 1, \cdots, \ell'-1)$を加える。

$(\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{\ell'})$

↓
- $\mu'_i\leq n$ が保証される。
- 負の成分があれば結果は0になる。
- 転置する。

$(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{\ell''})$

・$\ell''\leq n$ が保証される。

SO_{2n+1} に関しても，$\{e_k\}$ を用いて同様の議論が展開できる。

<u>定理5′</u>　$\pi_{SO_{2n+1}}(\lambda_{SO})$ は 0 または $\pm\mu_{SO_{2n+1}}$ ($\exists\mu$, $d(\mu)\leqq n$) となる。μ は λ から簡単に求められる。

μ を求める方法は SO_{2n+1} の場合は次のようになる。

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$

↓ • 転置する。

$(\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_{\ell'})$

↓ • $(0, 1, \cdots, \ell'-1)$ を引く。

$(a_1, a_2, \cdots, a_{\ell'})$

↓ • $n+1$ 以上の成分 x を $2n+1-x$ でおきかえる。
　• 符号はここではつかない。ここで 0 になることもない。

$(b_1, b_2, \cdots, b_{\ell'})$

↓ • 大きい順に並べ替える。
　• 等しい成分があれば結果は 0 になる。
　• 並べ替えの置換の符号がつく。

$(c_1, c_2, \cdots, c_{\ell'})$

↓ • $(0, 1, \cdots, \ell'-1)$ を加える。

$(\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{\ell'})$　（$\mu'_1 \leqq n$ が保証されている。）

↓ • 転置する。
　• 負の成分があれば結果は 0 になる。

$(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{\ell''})$　（$\ell'' \leqq n$ が保証されている。）

なお，$\{e^0_k\}_{1\leqq k\leqq n}$ は Sp_{2n} の基本表現に相当し，$\{e_k\}_{1\leqq k\leqq n}$ は SO_{2n+1} の基本表現というべきものである。従って既約指標を基本表現の指標で表す具体的な式が得られている。

6. ウェイト重複度多項式

以上に示されたことは，少なくともテンソル積に関する限り，同じλに対応する$\lambda_{Sp_{2n}}$はnが変わっても共通の性質を持つということであった。こんどはこの考え方がウェイトの重複度にも適用できないかどうか見てみよう。われわれは dominant integral weight をヤング図形と対応させたから，ヤング図形λに対応する既約表現の中の，ヤング図形ξに対応するウェイトの重複度を考え，nを動かして重複度をnの関数と見る。

定義　$n \geqq d(\lambda), d(\xi)$ とするとき

$$Q_{B,\lambda,\xi}(n) \underset{def}{:=} (\lambda_{SO_{2n+1}} \text{ 中のウェイト } \xi \text{ の重複度})$$

$$Q_{C,\lambda,\xi}(n) \underset{def}{:=} (\lambda_{Sp_{2n}} \text{ 中のウェイト } \xi \text{ の重複度})$$

定理6　i)　ξが$\lambda_{SO_{2n+1}}$のウェイト$\iff \lambda \geqq \xi$ (Snapper order, 即ちすべてのiに対し $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i \geqq \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i$)

ii)　ξが$\lambda_{Sp_{2n}}$のウェイト$\iff \lambda \geqq \xi$ かつ $|\lambda| \equiv |\xi| \pmod 2$

iii)　(SO, Sp に応じて) i)または ii)を満たすとき，

$Q_{*,\lambda,\xi}(n)$ ($* = B$ または C) はnの多項式となり，次数は $k=[(|\lambda|-|\xi|)/2]$，最高次の係数は $K_{\lambda,\xi'}/k!$ に等しい。但し $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_\ell, \underbrace{1, \cdots, 1}_{|\lambda|-|\xi| \text{個}})$ $(\ell = d(\xi))$，$K_{\lambda,\xi'}$ は Kostska 数で

ある（λ_{GL} 中のウェイト ξ' の重複度を表し，ヤング図形で計算できる）。

$Q_{\kappa,\lambda,\xi}(n)$ は具体的に多項式として決定することができる。以下に実例を示す。一般論は[1]を参照していただきたい。

例　$\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp}$ 中の $\square\square$ の重複度

$\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp_{2n}}$ は指標と見れば $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_n^{-1}, \cdots, x_1^{-1}$ の多項式であり，求めるのはこの中の x_1^2 の係数である。まず Λ 中で CIT iii) により

$$
\begin{aligned}
\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp} &= \begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{GL} - \square\square_{GL} \\
&= m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)} \\
&\quad - m_{(2)} - m_{(1,1)}
\end{aligned}
$$

ここで $m_{(\nu_1,\cdots,\nu_d)}$ は monomial symmetric function と呼ばれるもので，Λ_{2n} への射影 π_{2n} を施すと，$m_{(\nu_1,\cdots,\nu_d)}$ は $x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_d^{\nu_d}$ の $Sym(2n)$-orbit sum になる（$Sym(2n)$ は $2n$ 次対称群で，$x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ の置換として作用している）。

$$
\pi_{2n}\left(\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp}\right) = \pi_{2n}\begin{pmatrix} m_{(3,1)} + m_{(2,2)} + 2m_{(2,1,1)} + 3m_{(1,1,1,1)} \\ - m_{(2)} - m_{(1,1)} \end{pmatrix}.
$$

ここで両辺をさらに Sp_{2n} に制限すると，左辺は $\pi_{Sp_{2n}}\left(\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp}\right)$ となる。$n \geqq 2$ としてよいからこれは $\begin{array}{l}\square\square\square\\\square\end{array}_{Sp_{2n}}$ である。右辺においては Sp_{2n} への制限とは次のような代入を意味する。

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{2n-1} & x_{2n} \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_n^{-1} & \cdots & x_2^{-1} & x_1^{-1}
\end{array}
$$

この代入によって x_1^2 が出てくるのは以下の項からである。下には $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ のべき指数のみを書いて示す。

$$
\begin{array}{l|cccccccccccl}
m_{(3,1)} & 3 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 1 & (x_1^3 x_{2n}) \\
\hline
m_{(2,1,1)} & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & (x_1^2 x_2 x_{2n-1}) \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & & & & \cdots\cdots \\
 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & (x_1^2 x_n x_{n+1}) \\
\hline
m_{(2)} & 2 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 & (x_1^2)
\end{array}
$$

よって，各 m_ν の係数も考慮して，求める重複度は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
Q_{C;(3,1),(2)}(n) &= \overbrace{1}^{m_{(3,1)}\text{の寄与}} + \overbrace{2(n-1)}^{m_{(2,1,1)}\text{の寄与}} - \overbrace{1}^{m_{(2)}\text{の寄与}} \\
&= 2n-2
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] K. Koike, New multiplicity-formulas of weights for the classical groups, to appear.

[2] K. Koike and I. Terada, Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of types B_n, C_n, D_n, to appear.

[3] D. E. Littlewood, "The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd ed.", Oxford University Press, London, 1950.

[4] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials", Oxford University Press, Oxford, 1979.

[5] H. Weyl, "The Classical Groups, their Invariants and Representations, 2nd. ed.", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.

追記 1985年8月20日，来日中の Richard Stanley 教授(MIT) から，R. C. King の論文との関連をご教示いただいた。深い感謝の気持ちを捧げたい。